COLEGIO INTERNACIONAL NUEVO CENTRO

TEMA 2. EJERCICIOS: LÍMITES.CONTINUIDAD. ASÍNTOTAS. TEOREMAS.

1. Calcular los valores del parámetro **a** para que se verifiquen las siguientes igualdades:

a) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{3ax^3 - 5x + 1}{10x^3 + 5} = -1$ **b)** $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + ax + 1} - x = 2$

(Soluc: a=-10/3; a=4)

2. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \le 1 \\ ax + 3 & \text{si } 1 < x \le 2 \\ bx^3 - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Calcular los valores de a y b para que existan los limites en X=1 y X= 2.

(Soluc: a=-1, b=3/8)

Problema *(3 puntos)* Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} + 2 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ k & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en $x = 0$?

b) (1 punto) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea derivable en $x = 0$?

c) (1 punto) Determinar sus asíntotas.

Solución: a) K=3 , b) c) hay A. H. en y=2

Problema *(3 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$$

a) (1 punto) Indicar el dominio de definición de la función f y hallar sus asíntotas.

b) (1 punto) Hallar los extremos relativos de la función f y sus intervalos de concavidad y convexidad.

c) (1 punto) Dibujar la gráfica de f y hallar su máximo y su mínimo absolutos en el intervalo $[-1, 1]$.

Problema *(3 puntos)* Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+1}{x} & si \quad x \geq -1 \\ \\ \frac{2x}{x-1} & si \quad x < -1 \end{cases}$$

a) (0,5 punto) Estudiar el dominio y la continuidad de f.

b) (1,5 puntos) Hallar las asíntotas de la gráfica de f.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado y limitado por la gráfica de f y las rectas $y = 0$ $x = 1$, $x = 2$.

Solución: a)D: R- 0 ; continua en su dominio b) HAY A.V. Y A. H. C)

Problema *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites (donde "ln" significa logaritmo neperiano).

a) (1 punto) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

b) (1 punto) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x}$

Solución: a) 9/4 b) 1/8

Problema *(2 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6}$$

a) (1 punto) Encontrar los puntos de discontinuidad de f. Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.

b) (1 punto) Estudiar si f tiene alguna asíntota vertical

a) X=1 y X=-1 b) a.v. en x= -1

Problema *(puntos)* Calcular siguiente límite

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} \right)$$

Solución: 1

Problema *(2 puntos)*

a) (1 punto) Calcular los valores de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si} \quad x<0 \\ x^2+2a\cos x & \text{si} \quad 0 \le x < \pi \\ ax^2+b & \text{si} \quad x \ge \pi \end{cases}$$

sea continua en todo valor de x.

b) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para todos los valores a y b obtenidos en el apartado anterior.

Solución: a=1 , b= -2

Problema *(2 puntos)* Obtener el valor de k sabiendo que

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{kx+5} = e^2$$

Solución: K= 2/3

Problema *(2 puntos)* Calcular:

a) (1 punto) $\lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\frac{2+n}{1+n} \right)^{1-5n}$

b) (1 punto) $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4+2n^3-3} - \sqrt{n^4-n}}{n+5}$

Solución: a= e^{-5} b) 1

Problema *(2 puntos)* Estudiar los siguientes límites:

a) (1 punto) $\lim_{x \longrightarrow +\infty} (e^x - x^2)$

b) (1 punto) $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{4^x+5^x}{3^x+6^x}$

Solución: a= ∞ b) 0

Problema *(2 puntos)* Sea:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$$

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Estudiar cuándo se verifica que $f'(x) = 0$. Puesto que $f(1) = f(-1)$, ¿existe contradicción con el teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$?

Solución : a) continua en x=0

Problema *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} & \text{si} \quad 1 + ax > 0 \text{ y } x \neq 0 \\ \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 0 \end{cases},$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar los valores de los parámetros a, b para los cuales la función f es continua en $x = 0$.

b) (1,5 puntos) Para $a = b = 1$, estudiar si la función f es derivable en $x = 0$ aplicando la definición de derivada.

Solución: a) a=b= ±1

Problema *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ x + k & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x, se pide:

a) (1 punto) Determinar el valor de k para que la función sea continua en $\mathbf{R}$.

b) (1 punto) Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

c) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abcisa $x = 1$.

Solución: a) k= 0 b) (0,0) y (1,0)

Problema *(2 puntos)* Hallar:

a) (1 punto) $\lim_{x \longrightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x} \right]^{25}$

b) (1 punto) $\lim_{x \longrightarrow 0} (1+4x^3)^{2/x^3}$

Solución: a) -1 b) e^8

Problema *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \ln(x^2+4x-5)$, donde ln significa logaritmo neperiano,se pide:

a) (1 punto) Determinar el dominio de definición de $f(x)$ y las asíntotas verticales de su gráfica.

b) (1 punto) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución: a) A. V. x= -5, x= 1 D:

Problema *(2 puntos)* Obtener el valor de a para que

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2-3}{x^2+3} \right)^{ax^2} = 4$$

Solución: a= -ln4/6

Problema *(2 puntos)* Halla el valor de λ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda x^2}-1}{3x^2} & \text{si } x > 0 \\[2ex] \dfrac{\sin 2x}{x} & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

sea continua. Razonar la respuesta.

Solución: a) 6 pero con condiciones.

COLEGIO INTERNACIONAL NUEVO CENTRO

Problema *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4},$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar el dominio de f y sus asíntotas.

Solución:

Ejercicios de Teoremas de Bolzano

Demuestra que la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$ corta al eje de las abscisas en el intervalo [0,2].¿Se puede decir lo mismo de la función: $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$?

Sea la función $f(x) = x^3 - x^2 + 1$. ¿Se puede afirmar que existe al menos un punto c en el interior del intervalo [1,2] tal que $f(c) = 0$?

Demostrar que la ecuación $e^{-x} + 2 = x$ tiene al menos una solución real.

Dada la función $f(x) = x^3$, estudiar si está acotada superiormente e inferiormente en el intervalo [1, 5] e indica si alcanza sus valores máximos y mínimos.